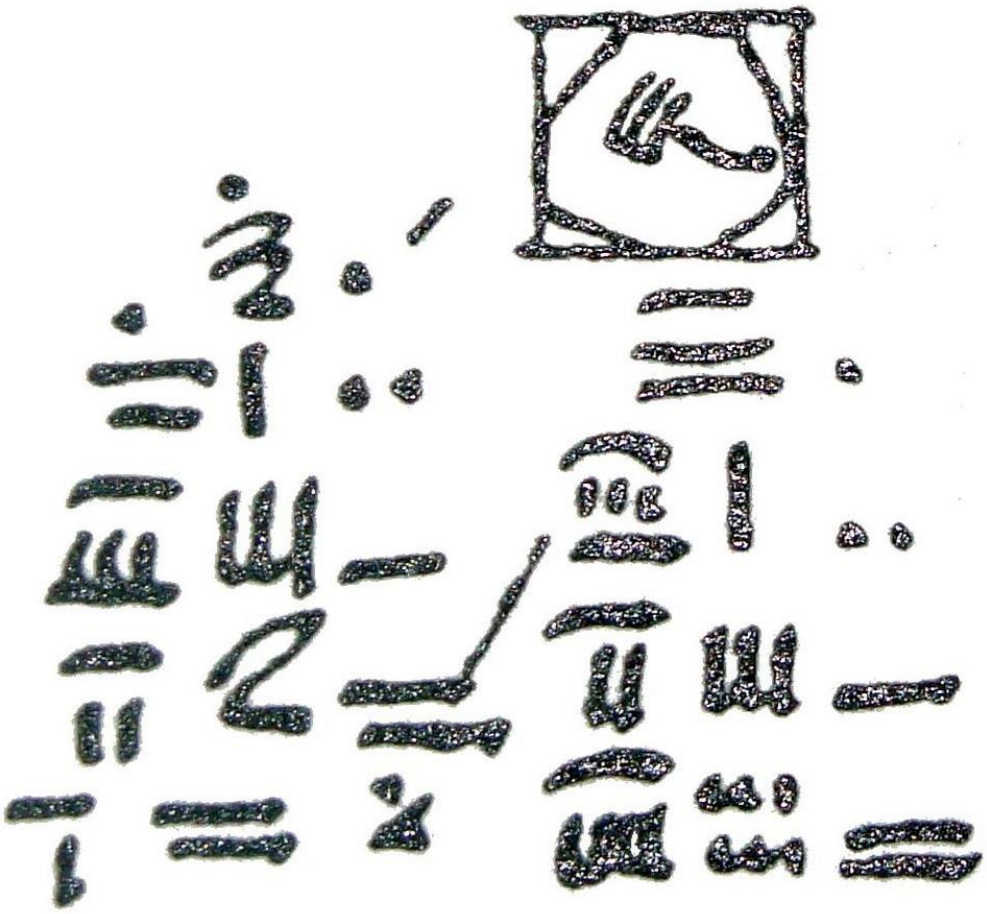
Elementare Algebra

Gymnasium, Klasse 5 bis 10

Vom 1x1 über $\sqrt[x]{\pi^y}$ bis $\log_x y$



Berechnung der berühmtesten Zahl der Mathematik: π
(Ägyptische Hieroglyphen, Ausschnitt, 1600 Jahre v.Chr.)

StD F. Steinleitner, Dez. 2017, Post@Franz-Steinleitner.de, www.Franz-Steinleitner.de

Ich benutze folgende Darstellungen:

{ eine Erläuterung oder Ergänzung – in geschweiften Klammern }

= … = bedeutet, ich bitte Dich, selber ein wenig zu rechnen

Etwas Neues

Sehr wichtig, gut einprägen

Beispiele und Aufgaben

Genau studieren, lernen, üben

Dies und das

SO NICHT – (beliebte) schwere Fehler

≅ bedeutet ungefähr { gerundet: 2,345 ≅ 2,35 und 2,344 ≅ 2,34 }

Wenn du etwas nicht gleich verstehst, schlaf drüber, probiere ein wenig rum.
Wenn immer noch nicht: schreib mir eine Mail, die dein Problem beschreibt.
Bitte auch dann – mit genauer Beschreibung - wenn du einen Fehler findest:
Post@Franz-Steinleitner.de

Im Folgenden eine zusammenhanglose Abfolge einiger Ausschnitte:

Prozent und Promille

Eine beliebte Bruchdarstellung im Alltag: **Nenner 100 bzw. 1000**

Prozent: **1,23 =** $\frac{123}{100}$ **= 123 %** { lateinisch centum ≡ 100 }

Promille: **1,234 =** $\frac{1234}{1000}$ **= 1234 ‰** { lateinisch mille ≡ 1000 }

Dezimal → Prozent: 0,045 = $\frac{4,5}{100}$ = 4,5 % **mal 100**

Dezimal Promille: 0,0045 = $\frac{4,5}{1000}$ = 4,5 ‰ **mal 1000**

Überlege: 2 ‰ = 0,002 = 0,2%

0,037 = $\frac{3,7}{100}$ **= 3,7 %** **und** **0,0037 =** $\frac{3,7}{1000}$ **= 3,7 ‰**

Übe die Verwandlung der Darstellungen: Prozent, Bruch, Dezimalzahl

3 = 300 % = 3000 ‰

23 % = 0,23 und 2,3 % = 0,023 und 0,23 % = 0,023

0,34 = 34 % und 1,54 = 154 % und 1,2345 = 123,45%

15/7 = $2,\overline{142857} \cong 2,1429$ = 214,29 %

Konzentration:

123,45 % = 1,2345 **teile durch 100 { Komma 2 Stellen nach links }**

1,2345 = 123,45 % **mal 100 { Komma 2 Stellen nach rechts }**

Lerne bitte

1/2 = 0,5 = 50 %

1/5 = 0,2 = 20 %

1/4 = 0,25 = 25 %

1/8 = 0,125 = 12,5 %

3/4 = 0,75 = 75 %

1/3 = $0,\overline{3}$ ≅ 0,3333... = 33, 3... % ≅ 33 %

1/6 = $0,1\overline{6}$ ≅ 0,1666... = 16, 6... % ≅ 17 %

Sehr wichtige Standard – Aufgaben:

Wie viel Prozent macht 2 im Vergleich zu 8 aus ?

$\frac{2}{8}$ = ¼ = 0,25 = 25 %

Wie viel sind 25 % von 8 ?

25 % von 8 = 0,25 · 8 = 2

25 % von 8 zu 8 dazu ergibt

8 + 25% von 8 = 100% von 8 + 25% von 8 = 125 % von 8 = 1,25 ·8

8 weniger 25 % von 8 ergibt

75 % von 8 = 0,75 · 8 = 6

Prozente bedeuten einen **Vergleich**, **wer** wird **mit wem** verglichen:

$$\textbf{Prozentualer Anteil} = \frac{\textbf{wer wird verglichen}}{\textbf{mit wem wird verglichen}}$$

2 im Vergleich zu 8 → 2 ist $\frac{2}{8}$ = 0,25 = 25 % von 8

Auto X fährt 90 km/h, Auto Y fährt 60 km/h

a) Wie schnell fährt X im Vergleich zu Y:

$$\frac{X}{Y} = \frac{90\ \frac{km}{h}}{60\ \frac{km}{h}} = \frac{3}{2} = 1{,}50 = 150\ \%$$

b) Auto X fährt also 1,5 mal so schnell, oder anders gesagt: 50 % schneller.

Die 60 km/h sind die sogenannten „ 100% „

c) Auto Y fährt entsprechend $\frac{Y}{X} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} = 0,\bar{6} \cong 0{,}67$ mal so

schnell wie Auto X, also um Faktor 0,67 langsamer, oder anders gesagt:

Auto Y fährt 67 % von Auto X und damit (100 - 67)% = 33% langsamer.

Mit { brutto } und ohne { netto } Mehrwertsteuer { MWSt }

Klar, aber bedeutsam: 100% von Irgendwas sind das Irgendwas

netto 54 € ergeben brutto

54 € + 19 % von 54 € = 100 % von 54 € + 19 % von 54 €

= 119 % von 54 € = 1,19 · 54 € = 64,26 €

brutto 64,26 € sind netto 64,26 € / 1,19 = 54 €

100 € netto sind 119 € brutto und 119 € brutto sind 100 € netto

Aber Vorsicht – Falle

100 € brutto sind NICHT 81 € netto, sondern 100 € /1,19 ≅ 84 €

Mit MWSt: mal 1,19

Ohne MWSt: teile durch 1,19

Denk nach und rechne mit:

54 € mit 25 % Nachlass ergeben 0,75 · 54 € = 40,50 €

54 € mit 25 % Aufschlag ergeben 1,25 · 54 € = 67,50 €

Potenzgesetze

Die Potenz $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ hat

die **Basis 3**, den **Exponenten 4** und den **Potenzwert 81**

Die Potenzgesetze folgen direkt aus der Definition $b^n = b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$

{ n-mal } und teilweise den Regeln für das Rechnen mit Brüchen

$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{b^n \cdot b^m = b^{n+m}}$

$2^7 : 2^3 = 2^{7-3} = 2^4 = 16 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{b^n : b^m = b^{n-m}}$

$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{(b^n)^m = b^{n \cdot m}}$

$3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 144 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

$12^2 : 4^2 = (12 : 4)^2 = 9 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$

Vorsicht:

Verwechsle $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$

NICHT mit $2^{3^4} = 2^{81} \cong 24 \cdot 10^{23} =$ 240000000... { 23 Nullen }

Benutze Schmierzettel für Zwischennotizen …

$2^3 \cdot 3^2 + 0{,}1^2 \cdot 10^3 - 10^2 : 10^3 + 0{,}5^2 \cdot 2^{3^2} = ?$	209,9
$[\ 3^2 + 4^2 - 5^2 :\ (\ 3 - 4)^2\ ] : 2017 = ?$	0
$X^2 \cdot X^3 \cdot (XY)^2 + (X^2 \cdot Y^2)^2 \cdot Y = ?$	$2X^4Y^5$
$\left(\frac{(X^2Y)^3}{0{,}5X^3Y} : \left(\frac{Y}{X}\right)^2 \right)^3 = ?$	$8X^{15}$

Schwerer Fehler: $2^3 = 2 \cdot 3$ oder $2^3 + 2^3 = 2^6$

Gedankenloser Unsinn: $2^3 + 4^2 = 6^5$ oder $2^3 \cdot 4^2 = 8^6$

Richtig: $2^3 + 4^2 = 8 + 16 = 24$ und $2^3 \cdot 4^2 = 8 \cdot 16 = 128$

Leider: $a^3 + b^2$ oder $a^3 \cdot b^2$ lässt sich nicht anders schreiben.

Ein sehr schwerer Fehler: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Prüf es einfach: $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$ aber $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Binomische Formeln

$$(E + Z)^2 = E^2 + 2 \cdot E \cdot Z + Z^2$$

$$(E - Z)^2 = E^2 - 2 \cdot E \cdot Z + Z^2$$

$$(E + Z) \cdot (E - Z) = E^2 - Z^2$$

Lern das bitte mit Worten (und benutze nicht das gefährliche a und b):

Erster und Zweiter zum Quadrat ergibt Erster-Quadrat und zweimal Erster-Zweiter und Zweiter-Quadrat.

Warum du das nicht mit $(a + b)^2$ lernen solltest:
weil das eine selbst gebaute Falle ist …
$(2a^2b - a)^2 = ?$ →

$(2a^2b - a)^2 = 4a^4b^2 - 4a^3b + a^2$

$(2x - 0{,}1ab^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 0{,}1ab^3 + (0{,}1ab^3)^2 = \ldots = 4x^2 - 0{,}4ab^3x + 0{,}01a^2b^6$

$(5^3 - 3^2) \cdot (0{,}25 + 1{,}75)^2 : 4 - 1 = \ldots = 55$

$(1/4 + (6/3 - 1/0{,}1)^2) : 0{,}5 + 0{,}5 = \ldots = 129$

$(5^3 - 5^2)^3 : 10^4 - 9 \cdot 11 = \ldots = 1$

$(3 - 7)^2 - (0{,}5^2 - 1/2) \cdot (3 + 3^2)^2 - (1 - 6) \cdot (6 + 1) = \ldots = 15$

$0{,}5^2 \cdot (4 - 5)^3 + 2^3 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot (3^3 - 3^2) + \frac{1}{4} = \ldots = 0$

$5^3 : 5^2 - (2 \cdot 5)^2 + 5^3 - 5^2 - (5^2 - 5^3) : (0{,}5 \cdot 10^2) + (5 - 1) \cdot (5 + 1) = \ldots = 33$

Potenzen mit negativen Exponenten

Es ist $\frac{2^7}{2^4} = \frac{2^4 \cdot 2^3}{2^4} = \ldots$ **{ kürze } …** $= 2^3 = 2^{7-4}$

$\frac{5^7}{5^9} = 5^{7-9} = 5^{-2} =$ **… { kürze links } …** $= \frac{1}{5^2}$

Es treten bei Anwendung aller bisherigen Definitionen und Gesetze keine Widersprüche auf, wenn wir festlegen: $\frac{2^4}{2^7} = 2^{4-7} = 2^{-3}$

$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$\frac{1}{b^{-n}} = b^n$

Seltsam, aber richtig: $\frac{X^n}{X^n} = X^{n-n} = X^0 \rightarrow$ **$X^0 = 1$ für jede Zahl X**

Negative Exponenten sind besonders hilfreich bei Zehnerpotenzen:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Prüfe an Beispielen: alle Potenzgesetze gelten formal weiter

$$10^5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} = 10^{5+2-4} = 10^3 = 1000$$

$$(b^2)^{-3} = b^{2\cdot(-3)} = b^{-6} = \frac{1}{b^6}$$

$$(10^2)^{-3} = 10^{2\cdot(-3)} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6}$$

$$0{,}01^{-3}\,\mathrm{dm} = (10^{-2})^{-3}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m} = 10^{(-2)\cdot(-3)-1}\,\mathrm{m} = 10^5\,\mathrm{m}$$

Techniker und Naturwissenschaftler nutzen das ständig und erfolgreich:

$$0{,}0023 \cdot 456{,}78 \cdot \frac{123{,}45}{10000} = 2{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}567 \cdot 10^{2} \cdot 1{,}2345 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-4}$$

Verfolge die Umformungen aufmerksam

Man kann damit – was sehr wichtig ist – den Wert im Kopf abschätzen:

Die Zehnerpotenzen liefern 10^{-3}, der Rest ca. 10.

Ergebnis ca. $10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} = 0{,}01$

Wer glaubt, Kopfrechnen sei wegen des TR überflüssig, hat von der Praxis – egal in welchem Beruf – keine Ahnung.

Es gibt nun schon viele Rechenwege, die zum Ziel führen:

$$(2 - 3 : 0{,}1^2) + 0{,}25 \cdot \left(\frac{0{,}2}{5\cdot 10^{-2}} + 400 \cdot 10^{-1}\right) - (0{,}5 + 10 - 1)^2 = ?$$

Im Kopf, mit Schmierblatt, zur Kontrolle auf möglichst viele Arten, dann erst Kontrolle mit dem Taschenrechner. Das weitaus beste Gehirnkrafttraining. Und mit einem Partner und kleinem Einsatz macht das auch noch viel Spaß.

Die Quadratwurzel

Gesucht ist eine Zahl X, deren Quadrat gerade Y ist, also $\mathbf{X^2 = Y}$

Wir nennen diese Zahl die „Quadratwurzel“ aus Y und schreiben $\mathbf{X = \sqrt{Y}}$

Y heißt **Radikand**

Jetzt tritt fast unbemerkt ein Problem auf, denn

Mathematik muss bei der Einführung neuer Operatoren eindeutig bleiben.

Nun ist $\sqrt{9} = 3$ weil $3^2 = 9$ ist. Es ist aber auch $(-3)^2 = 9$

Aus Gründen der Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit

legt man sich fest:

$$\sqrt{9} = \mathbf{+}\ 3$$

Die Mathematiker haben sich für die positive Variante entschieden:

generell gilt: $\sqrt{\mathbf{R}}$ ist per Vereinbarung **positiv**

Das Problem ist nun, der Term $\sqrt{x^2}$ ... denn x könnte negativ sein:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ und dann wäre $\sqrt{x^2} = x$ für $x = -3$ falsch

Dazu, falls noch unbekannt: **der Betrag eines Terms: | Term |**

Terme können positive und negative Werte liefern. Um sicher zu stellen, dass das Ergebnis positiv ist, definiert man einen Operator: den **Betrag**

Betrag eines Terms = positiver Wert = | Term |

Wir legen ergänzend fest $|0| = 0$

Dann ist $|3| = 3$ und $|-3| = 3$ aber $|x| = ?$ und $|\text{Term}| = ?$

Bei Termen brauchen wir also eine sogenannte **Fallunterscheidung**:

$|\text{Term}| = \text{Term}$, wenn der Term $\geqq 0$ ist

$|\text{Term}| = -\text{Term}$, wenn der Term < 0 ist

Das weitaus größere Problem:

$\sqrt{-9}$ existiert nicht weil $= (-3)^2 = +9$ ist

Die Zahl unter der Wurzel, der sogenannte Radikand muss positiv sein.

$\sqrt{R}$ ist nur definiert für $R \geqslant 0$
und $\sqrt{R}$ ist die positive Zahl, deren Quadrat R ist.

Gut einprägen:

$\sqrt{R}$ ist nur sinnvoll, wenn R ≧ 0 ist.

$\sqrt{R}$ ist die positive Zahl, deren Quadrat R ist: $\left(\sqrt{R}\right)^2 = R$

Daher ist $\sqrt{X^2}$ = | X |

Zudem ist $\sqrt{X \cdot Y}$ = $\sqrt{|X|} \cdot \sqrt{|Y|}$

VORSICHT:

$\sqrt{X^2 + Y^2} \neq |X| + |Y|$ { Teste $\sqrt{3^2 + 4^2}$ }

denn $(X + Y)^2 \neq X^2 + Y^2$ { sondern $X^2 + 2XY + Y^2$ }

Aufmerksam studieren, einprägen

$\sqrt{10^6} = 10^3$ weil $(10^3)^2 = 10^6$ ist

$\sqrt{Z^8} = Z^4$ aber $\sqrt{Z^6} = |Z^3|$ … weil Z negativ sein könnte.

VORSICHT: $\sqrt{2{,}5} = \sqrt{25 \cdot 10} = \sqrt{25} = 5 \cdot \sqrt{10}$

Teilweise radizieren: geht, weil $\sqrt{X \cdot Y} = \sqrt{|X|} \cdot \sqrt{|Y|}$

$\sqrt{441000} = \sqrt{9 \cdot 49 \cdot 100 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{10} = 210\sqrt{10}$

$\sqrt{20 \cdot a^3 x^7} = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a \cdot x^6 \cdot x} = 2ax^3 \cdot \sqrt{5ax}$

Exponentialterme und Logarithmen

Verwechsle nicht $3^2 = 9$ mit $3 \cdot 2 = 6$

Lerne die Begriffe: 3 ist die **Basis**, 2 ist der **Exponent**, 9 ist der **Potenzwert**

Lies diesen Satz genau: 2 ist der Exponent der Basis 3 mit dem Potenzwert 9

Dies schreibt man auf eine sehr merkwürdige, historisch bedingte Weise:

$$\mathbf{3^2 = 9 \leftrightarrow \log_3 9 = 2}$$

Sprich: der Logarithmus zur Basis 3 von 9 ist 2

Der Logarithmus einer Zahl ist also ein Exponent einer Basis

$$b^x = p \leftrightarrow \log_b p = x$$

Teste dein Verständnis: $b^{\log_b p} = \ldots = p$

Zugegeben: ganz schön verwirrend, aber im Praxiseinsatz erstaunlich einfach.

Beachte also: Basis b und Potenzwert p müssen positiv sein

$\log_{-2} p$ oder $\log_b(-2)$ sind nicht definiert

$\log_5 125 = 3$	weil $5^3 = 125$ ist
$\log_{0,1} 100 = -2$	weil $0{,}1^{-2} = 100$ ist
$\log_{10} 10^4 = 4$	natürlich, was denn sonst …
$\log_2 32 = 5$	weil $2^5 = 32$ ist
$\log_p 1 = 0$	weil $b^0 = 1$ ist für beliebige p { hier aber > 0 }

$\log_5 10$ ist NICHT 2 , sondern 1,430676558 … probier´s bitte aus.

$\log_5 -25$ und $\log_{-5} 25$ sind nicht definiert

Logarithmus - Gesetze

kann man aus den Potenzgesetzen herleiten:

gelten für jede Basis b > 0 und positive Argumente X, Y

$$\log_b X \cdot Y = \log_b X + \log_b Y$$

$$\log_b X : Y = \log_b X - \log_b Y$$

$$\log_b p^X = x \cdot \log_b p$$

Und daraus ein praktisch sehr wichtiges Gesetz zur Basistransformation

$$\log_b p = \frac{\log_B p}{\log_B b}, \text{ insbesondere } \log_b p = \frac{\log_{10} p}{\log_{10} b}$$

Beispiel: $\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} = \frac{6}{2} = 3$ … ok, denn $4^3 = 64$

Der Taschenrechner beherrscht nur die Logarithmen zur Basis 10

und zu einer hier nicht relevanten, der sogenannten „natürlichen Basis“ e.

Man schreibt meist kurz $\log_{10}(X)$ als log (X) oder lg (X)

Teste mit dem TR: $\log_5 125 = \frac{\log 125}{\log 5} = 3$

Damit kann man verzwickte Gleichungen lösen: $12{,}34^X = 56789$

$$x = \log_{12{,}43} 56789 = \frac{\log 56789}{\log 12{,}43} = 4{,}343891855\ldots$$

Beispiel aus der Praxis: Geldanlagen funktionieren meist so …
Anlagebetrag A, jährliche Verzinsung z.B. p % = 1,5 % = 0,015

Sparbetrag S nach n Jahren S (n):
nach einem Jahr: S (1) = A + 1,5 % von A = A + 0,015 ·A = 1,015 · A
nach 2 Jahren: S (2) = S (1) + 1,5 % von S (1) = … = $1{,}015^2 \cdot A$
Also nach n Jahren: **S (n)** = $1{,}015^n \cdot A$ = allgemein **$(p/100)^n \cdot A$**

Angenommen, du legst an deinem 18. Geburtstag 500 € an …

Wieviel ist dann mit 30 Jahren auf deinem Sparkonto ?

S (30 – 18) = S (12) = $1{,}015^{12} \cdot 500$ € = 597,80 €

Wann hätte sich der Anlagebetrag verdoppelt ?

S (n) = $1{,}015^n \cdot A = 2 \cdot A \rightarrow 1{,}015^n = 2$

Wir logarithmieren beidseitig: log ($1{,}015^n$) = log (2)

log ($1{,}015^n$) = n · log (1,015) → n = log (2) : log (1,015) ≅ 46,5 Jahre

Du wärst dann ziemlich genau (18 + 46,5) Jahre = 64 ½ Jahre alt.

Viel Freude und Erfolg

bei der Anwendung der hart erarbeiteten Fähigkeiten

Für genaue Fehlerhinweise wäre ich dankbar: Post@Franz-Steinleitner.de