Grundwissen Algebra – *lernen wie man Wörter und Grammatik lernt*

Zahlen

Sprechweise:
Platzhalter für Zahlen wie a, b, c , ... x, y nennen wir **algebraische Zahlen**
n, m stehen meist für natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ = 1, 2, 3, ...
z steht meist für eine ganze Zahl Z = 0, ±1, ±2, ±3, ...
q steht meist für eine rationale Zahl, die Menge $\mathbb{Q}$ aller denkbaren Brüche z/n

Beispiele für rationale Zahlen: 1/4 = 1 : 4 =0,25 ; - 6/3 = 6:3 = 2 ; 2/7 usw.

$\mathbb{Q}$ nennt man die Menge der **rationalen Zahlen:** die Menge aller denkbaren Brüche.
Dezimal geschrieben haben diese stets eine Periode mit einer Länge kleiner Nenner

Beispiele: 6/3 = 2,0000 ... wird kurz so geschrieben: $2,\overline{0}$ → Periode Null
$23/7 = 3,\overline{285714}$
$7/3 = 2,\overline{3}$

Darstellungsvarianten $\frac{11}{6}$ = 11/6 = 11 : 6 = $1,8\overline{3}$ ≈ 1,8 als gerundeter Näherungswert

$\mathbb{R}$ meint die **irrationalen Zahlen**, die nur symbolisch darstellbar sind:
Sie sind dezimal nur gerundet darstellbar, weil sie keine Periode haben!

Beispiele: Umfang eines Kreises mit Radius 1 = π = ca. 3,141592654
$\sqrt{2}$ = die Zahl, deren Quadrat = 2 ist: ca. 1,414213562
1,234567891011121314151617181920212223242526 27... [nachdenken!]

Denken wir uns die algebraische Zahl x variabel, so heißt sie **Variable**
Denken wir sie fest (aber unbekannt), so nennt man sie **Parameter**

Beispiel: $y = 3 \cdot x^2 + 2x/b - k$ mit den Variablen x und y, und dem Parameter b ≠ 0

Kurzschreibweisen: wir schreiben manchmal a · b = a b und 2 · a = 2a
Aber NIE 2·3 = 23, denn 2·3 = 6 ≠ 23

Brüche:
Stammbruch 1/n
Echter Bruch: 6/10 = 3/5 , da Zähler < Nenner
Unechter Bruch 5 / 3 , da Zähler > Nenner
Scheinbruch 6 / 3 = 2
Gemeiner Bruch: Sammelsurium aller Brüche, auch z.B. $\frac{1,23}{4,5}$
Gemischte Zahl 2 ¼ ... Vorsicht: 2 ¼ = 2 + ¼ NICHT 2·¼

Prozent, ein Bruch mit Nenner 100: 25/100 = 25% = 0,25
Promille, ein Bruch mit Nenner 1000: 2,5‰ = 2,5/1000 = 0,0025 → **1‰ = 0,1%**

3 = **300**/100 = 300 % 1,23 = **123**/100 = 123 % 0,24 = **24**/100 = 24 %	0,037 = **3,7**/100 = 3,7% 0,006 = **0,6**/100 = 0,6% 1,25‰ = 0,125%

Methode: 1,23 = 1,23·100 % = 123% bzw. 4,56% = 4,56/100 = 0,0456

Rechenvorgänge: + ; - ; · ; / oder : ; ↑

Man kann Zahlen **addieren, subtrahieren, multiplizieren, teilen, potenzieren**

*Die geltenden Regeln haben nur einen Zweck: die Rechenprozesse müssen widerspruchsfrei sein, und Berechnungen auf verschiedenen Wegen müssen zum selben Resultat führen! Man nennt das **Permanenzprinzip**. Nebenbei sollte das Ganze in der Praxis anwendbar sein.*

Etwas salopp gesagt: Mathematik ist konstruktionsgemäß zu 100% korrekt und eindeutig.

Aus diesem Grund gilt:	-a·(-b) = ab a·(-b) = - ab	-a : (-b) = ab a : (-b) = - ab

und +(-b) = - (+b) = -b sowie -(-b) = b und natürlich +(+b) = b

Eine Notwendigkeit im Sinne dieser Eindeutigkeit: das Teilen durch NULL ist verboten
Jede Festsetzung 1/0 = ... würde sofort zum Widerspruch führen!

Ein wichtiger sog. „Rechenoperator", die **Potenz**: 2^3 meint 2·2·2
10^5 meint 10·10·10·10·10 = 100 000

Sprechweisen: 2↑3 = 2^3 = 8] 2 ist die **Basis**, 3 ist der **Exponent**, 8 ist der **Potenzwert**

Wurzeloperator: $\sqrt[3]{8} = 8^{1/3}$ meint die positive Zahl, deren dritte Potenz 8 ist
Man nennt 8 den Radikanden.
Das Permanenzprinzip verlangt: der **Radikand** muss positiv sein.

Beispiele: $\sqrt[3]{-8} = -2$ ist nicht erlaubt, obwohl $(-2)^3 = -8$ ist.
Die Gleichung $x^3 = -8$ hat also die Lösung $x = -\sqrt[3]{8} = -2$

Im Gegensatz zu allen anderen Wissenschaften erlaubt Mathematik nicht die geringste Ungenauigkeit oder gar Schlamperei. Sie stützt sich auf reine Logik und eine Handvoll nicht beweisbarer allgemein akzeptierter Grundannahmen (Axiome):
z.B. zwei verschiedene Punkte im Raum legen eindeutig eine Gerade fest.

Rangreihenfolge der Rechenoperationen:

Salopp: „Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich“ und generell: „Klammer über alle“

Beispiel: $((-3)\cdot(-7) - (-2)^3 - 2) : (3^2 - 2\cdot3)^2 - (8:2^2 + 1) = \ldots = 6$

Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation: $a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
$(a + b) : c = a : c + b : c$

Achtung: alle anderen Varianten sind falsch !

Beispiele: $3\cdot(2 + x) = 3\cdot2 + 3\cdot x = 6 + 3x$
$-x\cdot(3 - y) = -x\cdot3 + (-x)\cdot(-y) = -3x + xy$

Wichtige Anwendung des Distributivgesetzes: **Ausklammern gemeinsamer Faktoren**

Beispiele: $6ab + 15ac = 3a\cdot(2b + 5c)$ Das ist ebenso schwierig wie wichtig
$2x + 6xy = 2x\cdot(1 + 3y)$ Überprüfe das mit dem Distributivgesetz

Vorsicht:
es gibt nur diese elementaren Rechengesetze (besser Vorschriften).
Alles andere ist frei erfunden und falsch.
Es gibt z.B. kein Kommutativgesetz der Division: $6:3 \neq 3:6$

Und man kann unbedacht undefinierte Ausdrücke schreiben: $8:4:2$ ist nicht definiert!
Ebenso unsinnig ist eine Abfolge von Operatoren: $+ - 2$ ist nicht definiert

Rechenregeln für Potenzen und Brüche:

Speziell für das Rechnen mit Potenzen und Brüchen gibt es je eine Handvoll „Rechengesetze“ (eigentlich Vereinfachungs- oder Änderungsregeln), die man „im Schlaf“ und bombensicher beherrschen muss. [→ eigene Handreichungen]

Es empfiehlt sich, diese Regeln auf A6-Kärtchen zu schreiben und auswendig zu lernen.
Das unverzichtbare sichere Beherrschen der Regeln entsteht aber erst durch ständiges Anwenden. Dass man die Bedeutung der Hebel im Auto kennt, heißt nicht, dass man Auto fahren kann ... das lernt man durch Fahren.